वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

लघुपुस्तिका

1.	गणित म्हणजे 'का'?	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00
2.	Sin 90 = 1 'का'?	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00
3.	त्रिकोणमिती आणि आलेख	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00
4.	हत्तीचा उंदीर	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00
5.	साक्षर भूमिती	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00

आगामी

- काही पत्रिका आणि काही लघुपत्रिका
- काही कृतिपत्रिका





लघुपुस्तिका क्र. 01

वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

द्वारा : श्री. ना. शं. मोने, 1123, भाग्योदय, ब्राह्मणशाही, वाई–412 803.

दूरध्वनी : (02167) 220766, Email : nagesh.mone@gmail.com

गणित म्हणजे 'का'?

प्रा. मनोहर रामचंद्र राईलकर

वाई तालुका गणित अध्यापक, मंडळ

वाई

अक्षरजुळणी
प्रा. मनोहर राईलकर पुणे

संपादक
नागेश शंकर मोने

संपादन साह्य
श्री. अरुण सावंत
श्री. भगवान भुजबळ
सौ. अनुराधा जोशी

प्रकाशक
श्री. दिनकर वि. फरांदे
अध्यक्ष, वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ
वाई

प्रकाशन वर्ष
16 जानेवारी 2011

लेखक
प्रा. मनोहर राईलकर
56, मृण्मयी जेधेनगर,
बिबवेवाडी, पुणे-37
दूरध्वनी: (020) 24420566

मुद्रक
सरस्वती ऑफसेट
275 क, मंगळवार पेठ, सातारा.
दूरध्वनी : (02162) 284430

मूल्य रुपये - **20/-**

गणित म्हणजे 'का?'

1

युक्त्याः आम्हाला आमच्या शिक्षकांनी आकडेमोडीच्या अनेक युक्त्या सांगितल्या होत्या. तुम्हालाही, तुमच्या शिक्षकांनी किंवा दुसऱ्या कुणीतरी, सांगितल्या असतीलच, विभाज्यतेच्या कसोट्याही सांगितल्या असतील. ज्या संख्येच्या शेवटी 5 हा अंक असतो, तिचा वर्ग पटकन करण्याची युक्तीही तुम्हाला कुणी सांगितली असेल. अशा नानाविध युक्त्यांच्या मदतीनं तुम्ही काही आकडेमोड पटापटा करू शकला असाल, आणि ज्यांना अशा युक्त्याप्रयुक्त्या माहीत नसतील, त्यांच्याहून आकडेमोडीची उदाहरणं सोडवण्याचा तुमचा वेगही अधिक असेल. उदाहरणं सोडवण्याकरता ह्या युक्त्या उपयोगी पडतात हेही मला मान्य आहे. माझा अशा युक्त्यांना विरोधही नाही. पण, **युक्त्या म्हणजे गणित नव्हे.** अगदी निर्विवादपणं मला वाटतं की, केवळ युक्त्या माहीत असणं म्हणजे गणित येणं नव्हे.

दुर्दैवानं हा समज कसा कुणास ठाऊक, आपल्या समाजात दृढमूल झाला आहे. तुम्ही पाढे पाठ करता. मुख्यतः गुणाकाराचे पाढे. काही शाळांतून बेरजेचे पाढेही पाठ करून घेतले जातात. तसं पाहिलं तर पाढेही आकडेमोडीच्या युक्त्याच. अलीकडे पाढ्यांचं प्रमाण काहीसं कमी झालं आहे. पण जुन्या काळी एक ते तीस पर्यंतचे पाढे तर पाठ करावे लागतच. पण त्याशिवाय, पावकी, निमकी, पाऊणकी, सवायकी, दीडकी, अडीचकी, आणि औटकी (म्हणजे साडेतीनकी), अकरकी..., असेही पाढे पाठ करावे लागत. त्याशिवाय, आजच्यासारखी दशमान पद्धत नसल्यामुळं परिमाणांचे किंवा मोजमापांचे नाना प्रकार असत. त्यांच्यांतल्या संबंधावर आधारित उदाहरणं सोडवण्याकरता काही युक्त्या पाठ कराव्या लागत. त्यांना 'चाली' म्हणत. जो पाढे-चाली ह्यांत पारंगत असे तो उदाहरणं पटापटा सोडवीत असे. आणि हुशार म्हणून मान्यता मिळवीत असे.

पटापटा आकडेमोड करता येणं चूक आहे, असं मी म्हणत नाही. पण तेवढंच येणं म्हणजे गणित येणं असं मी मानीत नाही. तसं मान्य केलं तर कितीतरी मोठ्या संख्यांची अगदी वेगानं आकडेमोड करणारं तेही अगदी अचूकपणं करणारं गणकयंत्र (कॅल्क्युलेटर) मोठ्ठा गणिती ठरेल!

का?: पण, आपला वेळ व त्रास वाचवणाऱ्या त्या चालींमागं काय तर्क आहे, युक्त्यांमुळं उदाहरणं जी सुटतात, ती कशाच्या आधारावर, हे समजणं म्हणजे गणित येणं. आमच्या काळात कदाचित, त्या चाली शिकवणाऱ्या शिक्षकांनाही त्या युक्त्यांमागील तर्क माहीत नसणं संभवतं.

आणखी काही प्रश्न. आकडेमोडीची एखादी युक्ती कळल्यावर तुमच्यापैकी कितीजणांच्या मनात 'का?' असा प्रश्न उद्भवतो? ज्यांच्या मनात उद्भवतो त्यांच्यापैकी कितीजण युक्तीमागच्या तत्त्वाचा स्वतः शोध घेतात, धडपड करतात, किंवा निदान आपल्या शिक्षकांना विचारतात? आणि सरतेशेवटी, अश्यांपैकी किती जण, त्याचं उत्तर मिळत नाही तोवर मी स्वस्थ बसणार नाही, असं ठरवतात?

मुलांनो, **जर आपल्याला गणित यावं असं खरंच तुम्हाला वाटत असेल तर, असे प्रश्न विचारण्याची आणि त्याची तड लावण्याची सवय तुम्ही लावून घेतली पाहिजे.** भले मग आयुष्यात गणिती होण्याचं तुमचं स्वप्न नसेलही. वैज्ञानिक आणि मग संशोधक, किंवा अभियंता, व्हायचं असेल, तरीसुद्धा ही सवय हवी. नेहमीच, 'का?' असं स्वतःला विचारीत जावं. नाही सुचलं तर माहीतगारांना विचारायचंच, असा निश्चय करा.

माझा तुम्हाला असा आग्रह आहे, की आकडेमोडीची एखादी युक्ती समजल्यावर, लागलीच तुम्ही 'का?' असा प्रश्न विचारला पाहिजे. स्वतःला नाही तर शिक्षकांना. आणि त्याचं उत्तर मिळवण्याची धडपड केली(च) पाहिजे. ह्या छोट्याशा पुस्तिकेतून तुमच्या मनात असलेल्या (आणि कदाचित नसलेल्याही) अशा 'का?' प्रश्नांची उत्तरं आपण ह्या पुस्तिकेत मिळवू.

वर्ग करणे: (1) ज्या संख्येच्या एकक स्थानी 5 हा अंक आहे, तिचा वर्ग करण्याची युक्ती अशी - समजा 25 चा वर्ग करायचा आहे. इथं दशक 2 आहे, म्हणून 2 व त्याच्या पुढचा अंक 3 ह्यांचा गुणाकार 6 लिहून त्यापुढं 25 लिहिले की संख्येचा वर्ग 625 मिळतो. कारण,

$$20 \times 30 = (25 - 5)(25 + 5) = 25^2 - 5^2$$

पण, $20 \times 30 = 2 \times 3$ शे = 6 शे म्हणून

$$25^2 = 20 \times 30 + 25 = 600 + 25 = 625$$

समजलं कारण? आणखी एक उदाहरण सांगतो. त्यावरून तुम्हाला ह्या युक्तीमागचं तत्त्व चांगलं समजून येईल.

$$40 \times 50 = (45 - 5)(45 + 5) = 45^2 - 5^2$$

म्हणून

$$45^2 = 40 \times 50 + 25 = 20 \text{ शे} + 25 = 2025$$

आता तुम्ही आणखी काही उदाहरणं स्वतःच करून पहा. म्हणजे तुमची ह्या युक्तीमागची समजूत अधिक स्पष्ट आणि पक्की होईल. इथं बीजगणितातलं $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ हे $a^2 = (a - b)(a + b) + b^2$ हे सूत्र आपण वापरलं आहे, हे कळलं?

(2) 100 जवळच्या संख्यांचा वर्ग करण्याची पुढं दिलेली युक्ती कदाचित काहींना माहीत असेलही. काहींना माहीत नसेल म्हणून आधी युक्ती सांगतो. मग तिच्यामागची कारणंही सांगतो. समजा 96 चा वर्ग करायचा आहे. 96 हे शंभराहून कितीनं कमी आहेत? 4 नं कमी आहेत. मग 96 मधून आणखी एकदा 4 कमी (का?) करा, म्हणजे 92. आता **त्याच्या पुढं** 4 चा वर्ग 16, लिहा. म्हणून $96^2 = 9216$, असं लिहायचं. ठळक अक्षरं पाहून तुमच्या मनात 'का?' असा प्रश्न आला का? आला असला तर फारच छान. आता, त्याचं उत्तर मिळवण्याकरता पुन्हा बीजगणिताचा उपयोग करू. पुढं जे लिहिलं आहे त्यावरून सहज कळेल.

$96 = 100 - 4$, म्हणून, $(96)^2$

$= (100 - 4)^2$

$= 100^2 - 2 \times 4 \times 100 + 4^2$

$= 100(100 - 4 - 4) + 16$

$= 100 \times 92 + 16$

$= 92$ शतक $+ 16$

$$100 - 2 \times 4 = 100 - 4 - 4 = 96 - 4 = 92$$

कळलं? 92 च्या पुढं 16 लिहिले की आपोआपच 92 शतक होतात. आणखी एकदा, म्हणजे एकूण दोनदा 4 का वजा केले समजलं? ह्या

युक्तीत $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ हे सूत्र वापरलं आहे. सूत्रात **2** अंक मुद्दाम ठळक दाखवला आहे.

मात्र, ह्या प्रकारच्या उदाहरणांत एक काळजी घ्यायला हवी. समजा 97 चा वर्ग करायचा आहे. मग 97 हे 100 पेक्षा 3 नं कमी आहेत. म्हणून 3 चा वर्ग 9 घेऊन तुम्ही 97 - 3 = 94. ह्यावरून 94 च्यापुढं 9 लिहून 949 असं लिहाल तर तुमचं उत्तर चुकीचं येईल. तुमची अशी चूक होऊ नये म्हणून कुणी तुम्हाला 9 ऐवजी 09 लिहायचे आणि मग वर्ग

$$97^2 = 9409$$

असा लिहायचा असंही सांगेल. ते बरोबर आहे. पण, 'एक शून्य तरी का घ्यायचं?' ते जर समजलं नाही तर पुन्हा केव्हा तरी अशा चुका होऊ शकतील. कारणं तपासू. 97 = 100 - 3 आणि 97 - 3 म्हणजे 94 = 100 - 2 x 3. वरचा खुलासा पहा. पण, इतके शतक असल्यामुळं 94 च्या पुढं नुसते 9 लिहिले तर 94 शतक होणार नाहीत. (काय होतील?) त्याच्यापुढं दोन अंक आले तरच शतक होतील. म्हणून 94 च्या पुढं **0**9 लिहायचे. दोनपेक्षा कमी अंक लिहिले तर शतक होत नाहीत. **0** ठळक लिहिला आहे.

अशा प्रकारची काळजी संख्यांकरता नेहमी घ्यावी लागते. कधी कधी हातचे येतात. त्यांच्याकडेही लक्ष हवं. म्हणून युक्त्यांचा वापर अंधळेपणानं कधी करायचा नाही. आणि तसं आपल्याकडून होऊ नये म्हणूनच '**का?**' हे समजलं पाहिजे. उदाहरणार्थ,88 चा वर्ग करताना काय काळजी घ्यायची?

(3) 88, 100 ला किती कमी (12) आहेत? वरच्याप्रमाणंच तितके कमी करायचे (88 - 12 = 76) आणि त्याच्यापुढं 12 चा वर्ग (144) लिहायचा. पण, म्हणून उत्तर 88^2 = 76144 असं लिहिणं बरोबर होईल का? इथं काय चुकलं आहे? उत्तर 7744 आलं पाहिजे ना? कारण, 144 मधला 1, शतक आहे. कारण, **दोनपेक्षा जास्त अंक लिहिले तरीही शतक होत नाहीत.** (किती होतात?)

(4) 94 चा वर्ग करण्याची युक्ती वापरून तुम्ही104 चा वर्ग कसा करायचा ते (आणि तेही सकारण) सांगू शकाल का?

युक्तीः 104 हे 100 पेक्षा 4 नं **जास्त** आहेत म्हणून आणखी एकदा 4 **मिळवायचे**. (96 चा वर्ग करताना 4 आणखी एकदा **कमी** केले होते.)

आणि त्यापुढं 4 चा वर्ग 16 लिहायचा. म्हणून

104^2 = 108 श + 16 = 10816

दोन्ही रीतींतलं साम्य आणि फरक ध्यानात घ्या.

(5) आणि हीच युक्ती वापरून, 103, 112 यांचा वर्ग करताना काय काळजी घ्यायला हवी? युक्ती आणि कारणं, दोन्ही सांगा.

टीपः 96 चा वर्ग करताना जी युक्ती वापरली, जवळ जवळ तशीच युक्ती शंभरापेक्षा कमी पण, शंभराजवळच्या दोन संख्यांचा गुणाकार करताना वापरायची. उदाहरणार्थ, समजा आपल्याला96 x 97 हा गुणाकार करायचा आहे. मग पुढीलप्रमाणं चित्र काढा...

96 ... 4 > 3x4
97 ... 3
9312 =12

आता, याचा अर्थ समजून घ्या. 96 शंभरपेक्षा4 नं कमी आहेत आणि 97, 3 नं कमी आहेत. म्हणून 96 मधून 3 किंवा 97 मधून 4 कमी करा. ते लक्षात यावं म्हणून 96 आणि 3, तसंच 97 आणि 4 तिरप्या रेषांनी एकमेकांना जोडून दाखवले आहेत. कसंही केलं तरी उत्तर 93 च येईल. आणि त्यापुढं 3x4 = 12 हा गुणाकार लिहा. म्हणून 96 x 97 = 9312. ही युक्ती वैदिक गणितात दिली आहे. पण कारण सांगितलेलं नाही.

पुढील पाठात वर्ग करण्याच्या आणखी काही युक्त्या आणि अर्थातच, त्यांच्यामागची कारणंही पाहू.

2

(6) वर्ग करणेः जर तुम्ही 1 ते 25 पर्यंतच्या संख्यांचे वर्ग पाठ करून ठेवलेत तर तुम्हाला त्यापुढच्या संख्यांचे वर्ग चटकन सांगता येतील. उदाहरणं सोडवताना आपल्याला ह्या युक्तीचा उपयोग करून आपला वेळ वाचवता येतो. 1 ते 25 पर्यंतच्या संख्यांचे वर्ग पुढं दिल्याप्रमाणं लिहा. आणि त्यांच्याच पुढं **खालून वर** 26 ते 49 पर्यंतच्या संख्यांचे वर्ग असे

खाली दाखवल्याप्रमाणं लिहा. कसे लिहिले आहेत त्याचं नीट निरीक्षण करा.

संख्या	वर्ग	संख्या	वर्ग
1	1	49	2401
2	4	48	2304
...	...	...	...
22	484	28	784
23	529	27	729
24	576	26	676
	25	625	

(तुम्ही आपल्या कोष्टक पूर्ण लिहा.) आता दुसऱ्या आणि चौथ्या स्तंभांची तुलना करा. काय लक्षात येतं? कोणत्याही एका ओळीतल्या वर्गांच्या एकक आणि दशक स्थानच्या संख्या सारख्याच आहेत. आणि शतकस्थानच्या संख्यांची तुलना केली तर पुढील युक्ती सुचते.

24, 26 ह्या संख्या 25 पासून समान (1) अंतरावर पण, विरुद्ध बाजूला आहेत. आणि त्यांच्या वर्गांतला फरक तितक्याच (1) शतकाचा आहे. म्हणूनच म्हटलं की, जर 1 ते 24 पर्यंतच्या संख्यांचे वर्ग पाठ करून ठेवलेत. तर 26 ते 49 पर्यंतच्या संख्यांचे वर्ग तुम्ही चटकन मिळवू शकाल. उदाहरणार्थ 22 चा वर्ग 484. 22 हे 25 पेक्षा 3 नं कमी तर 28, 3 नं जास्त. म्हणून

$$28^2 = 22^2 + 3 \text{ शे} = 484 + 3 \text{ शे} = 784$$

नेहमीचा प्रश्न 'का?' तुम्ही सांगता? पुढचं नित्यसमीकरण पहा की कळेल. आणि तुम्ही सांगू शकाल.

$$(25 + x)^2 - (25 - x)^2 = 100x = x \text{ शे म्हणून}$$

$$(25 + x)^2 = (25 - x)^2 + x \text{ शे}$$

यावरून युक्तीमागचं कारण स्पष्ट होतं. आता 51 ते 75 आणि 76 ते 99 पर्यंतच्या संख्यांचे वर्ग करण्याच्या युक्त्या व त्यांमागील कारणं तुम्हीच शोधून काढा.

(7) वजाबाकीची युक्ती: दोन संख्यांची वजाबाकी करायची रीत तुम्हाला माहीत आहे. आज आपण वजाबाकीची एक वेगळी रीत पाहू.

समजा आपल्याला 7843 - 5492 ही वजाबाकी करायची आहे.

पुढचं विवेचन वाचण्यापूर्वी ही वजाबाकी करून उत्तर काढून ठेवा. आता आपण अंकांच्या पुढीलप्रमाणं जोड्या करू:

(0,9), (1,8), (2,7), (3,6), (4,5)

कशा जोड्या केल्या आहेत ते कळलं? कोणत्याही जोडीतल्या अंकांची बेरीज 9 आहे, हे लक्षात घ्या. नंतर वजाबाकीत संख्या एकाखाली एक लिहितात तशा लिहा. पण, खालच्या संख्येतल्या अंकांऐवजी त्यांचे**जोडीदार**, म्हणजे 5 च्या जागी 4, 4 च्या जागी 5, इ. लिहा. नंतर त्या दोन संख्यांची **बेरीज (वजाबाकी नव्हे)** करा. आलेल्या बेरजेत आरंभी आलेला **1** खोडून एककस्थानी मिळवा.

```
  7843      7843
+ 4507    + 4507
 12350     12350
              +1
            2351
```

येणारं उत्तर 2351 म्हणजे इष्ट वजाबाकी. आश्चर्य वाटलं ना? आणखी काही वजाबाक्या करून पहा. म्हणजे ह्या रीतीवर प्रभुत्व मिळेल. काढता शोधून याचं कारण? पहा प्रयत्न करून नाहीतर पुढच्या पाठात सांगेनच.

ह्या रीतीचा उपयोग करून वजाबाकी करताना एक काळजी घ्यावी लागते. वरच्या संख्येपेक्षा खालच्या संख्येतील अंकांची संख्या कमी असेल तर आरंभी जरूर तितकी शून्यं लिहून ती तितक्या अंकांची संख्या करून घ्यायची. उदाहरणार्थ, 8473 - 452 ही वजाबाकी 8473 - 0452 अशी लिहून घ्यावी लागेल. मगच आपली युक्ती वापरता येईल. का? पुन्हा, कारण काय? काढता शोधून?

विभाज्यता कसोट्या: तुम्हाला विभाज्यतेच्या काही कसोट्या माहीत आहेत.

(1) 2 ची कसोटी. ज्या संख्याच्या एकक-स्थानी सम अंक असेल तिला 2 नं भाग जातो.

(2) 5 ची कसोटी. ज्या संख्येच्या एकक-स्थानी 0 किंवा 5 असेल, तिला 5 नं भाग जातो.

(3) 3 ची कसोटी. संख्येतील अंकांच्या बेरजेला 3 नं भाग जात असेल तर

संख्येलाही 3 नं भाग जातो. अन्यथा नाही.

(4) 9 ची कसोटी. संख्येतील अंकांच्या बेरजेला 9 नं भाग जात असेल तर संख्येलाही 9 नं भाग जातो. अन्यथा नाही.

पहिल्या दोन कसोट्यांमागची कारणं समजणं फारसं कठिण नाही. पुढच्या कसोट्यांमागची कारणं समजून घेण्याकरता आपल्याला काही प्रमेयांचा आधार घ्यावा लागेल. कोणती?

ही प्रमेयं महत्त्वाची आहेत. त्या प्रमेयांचा उपयोग सर्वच कसोट्यांच्या मागची कारणं समजण्याकरता होईल, इतकी ती महत्त्वाची आहेत.

प्रमेय 1: जर p नं a आणि b ला भाग जात असेल तर p नं a+b लाही भाग जातो.

टीप (1) ह्या सर्व प्रमेयांतील संख्या पूर्णांकच असणार आणि भाजक संख्या धनच असणार, हे लक्षात ठेवा.

टीप (2) 3 नं 12 ला भाग जातो म्हणजे काय? तर 12 ही 3 ची पूर्ण पट असते. निराळ्या शब्दांत, 12 ही संख्या 3 गुणिले एक पूर्ण संख्या (इथ 4) अशी लिहिता येते. व्यापक अर्थानं बोलायचं तर a नं b ला भाग जातो, म्हणजे b = ac असं लिहिता येईल अशी एक पूर्णांक संख्या c असते.

शालेय पातळीवर **भाग जाणे** ह्या कल्पनेच्या ह्या अर्थाचा फारसा ऊहापोह केला जात नाही. कारण तेवढ्या प्रमाणात त्याची गरज नसते, हे होय. पण, आता ह्या प्रमेयाच्या सिद्धतेकरता हा अर्थ प्रकर्षानं वापरावा लागतो, हे लक्षात घ्या. म्हणून भागाकार ही गुणाकाराच्या उलट क्रिया आहे.

टीप (3) हा अर्थ आपण दोन्ही त-हेनं वापरणार. म्हणजे जर a नं b ला भाग जात असेल तर वरच्या प्रमाणं c मिळेल. आणि उलट, जर b = ac असा c मिळाला असेल तर a नं b ला भाग जातो असं म्हणणार. तुम्हाला माहीत असलेल्या शब्दांत सांगायचं तर मूळ गुणधर्म आणि त्याचा व्यत्यास.

सिद्धता: p नं a ला आणि b ला भाग जातो म्हणून a=pu आणि b=pv असं लिहिता येईल, असे u,v हे दोन पूर्णांक असतात. त्यांची बेरीज केल्यास a+b = pu+pv = p(u+v) मिळतं. पण, u+v हाही पूर्णांकच आहे. म्हणून p नं a+b ला भाग जातो. म्हणजे a, p ची u पट आणि b, v पट आहे. म्हणून a+b = pu + pv = p(u+v) = p ची u+v पट आहे, असं ठरतं.

प्रमेय 2: जर p नं a आणि b ला भाग जात असेल तर p नं a-b लाही भाग जातो. ह्या प्रमेयाची सिद्धता वरच्याप्रमाणंच आहे. मुख्य कारण काय?

प्रमेय 3: जर p धन पूर्णांक संख्या असून तिनं a-b आणि b ला भाग जात असेल तर p नं a लाही भाग जातो. ह्याची सिद्धता अगदीच सोपी आहे. कारण a=(a-b)+b असं आपण लिहू शकतो. आणि नंतर **प्रमेय 1** चा उपयोग करू शकतो.

प्रमेय 4: जर p धन पूर्णांक संख्या असून तिनं a+b आणि b ला भाग जात असेल तर p नं a लाही भाग जातो. सिद्धता सोपी आहे. a=(a+b)-b असं आपण लिहू शकतो.

उपप्रमेय: आपण असंही म्हणू शकतो की, जर p नं a-b ला भाग जात असेल, पण b ला जात **नसेल** तर p नं a ला भाग जाणार नाही.

टीप (4): असा उलट निर्णय सांगणारं हे प्रमेय आपल्याला का लागतं, तेही समजून घ्या. 3 च्या किंवा 9 च्या कसोटीत 'संख्येतील अंकांच्या संख्येला (कसोटी संख्या) 3 नं भाग जात **नसेल** तर दिलेल्या संख्येलाही 3 नं भाग जात **नाही**,' असं उलटही आपली कसोटी सांगते. त्यामागचं कारणही कळलं पाहिजे. म्हणून हे उपप्रमेय मुद्दाम निराळं मांडलं आहे.

सिद्धता: (क्रमविरुद्ध) समजा जर p नं a ला भाग जात असेल तर मग प्रमेय २ अनुसार, p नं a-(a-b)=b लाही भाग जाईल. पण, हे तर दिलेल्या 'b ला भाग जात नाही,' ह्या माहितीशी विसंगत.

आता आपण विभाज्यतेच्या आणखी काही कसोट्या आणि वरच्यातल्या शेवटच्या दोन व इतर कसोट्यांच्यामागची कारणं पाहू.

7 ची कसोटी: उदाहरण म्हणून आपण 168 ही संख्या घेऊ. हिला 7 नं भाग जातो की नाही, हे ठरवणारी कसोटी पुढीलप्रमाणं -

दशक-एकक इतका भाग (म्हणजे 68) तोडून काढू. व राहिलेला भाग नवीन संख्या म्हणून समजू. म्हणजे 68 हा एक भाग व राहिलेला 1 हा (100 नव्हे) दुसरा भाग. दुस-या भागाची दुप्पट करून पहिल्या भागात मिळवू. उत्तर 70. ह्या संख्येला आपण कसोटी-संख्या म्हणू. जर कसोटी-संख्येला 7 नं भाग जात असेल तर मूळच्या संख्येलाही 7 नं भाग जातो. आणि कसोटी-संख्येला 7 नं भाग जात नसेल तर मूळच्या संख्येलाही जात नाही. 70 ला 7 नं भाग जातो. म्हणून 168 लाही 7 नं भाग जातो.

आता 272 ही संख्या घ्या. पहिला भाग 72 आणि दुसरा भाग 2. म्हणून 72 मध्ये 2 च्या दुप्पट 4 मिळवले की मिळतात 76. ह्या संख्येला 7 नं भाग जात नाही. म्हणून 272 लाही जात नाही. सरावासाठी तुम्हीच आणखी काही संख्या घ्या. म्हणजे कल्पना स्पष्ट होईल.

आता प्रश्न, 'का?' त्याचं उत्तर पाहू. प्रथम 168 संख्येकरता आपण काय केलंय ते पाहू. 68 हा पहिला भाग बाजूला काढला तेव्हा जो 1 राहिला तो मुळात 1 शे होता, आणि 68 काढून टाकल्यामुळंच तो 1 झाला, हे विसरायचं नाही. (हे गुणाकारात किंवा वर्गात पुढं दोन अंक लिहिल्यावर मूळच्या संख्येचे शेकडे झाले होते, त्याच्या नेमकं विरुद्ध आहे, हे कळलं का?) तेव्हा, जर संख्या uvw असेल तर स्थानिक मूल्यांनुसार ती 100u+10v+w अशी असते. मग त्या संख्येतील दशक-एकक भाग 10v+w असा मिळेल. आणि दुसरा भाग 100u न राहता आता नुसता u राहील. त्याची दुप्पट पहिल्या भागात मिळवल्यावर 10v+w+2u मिळेल. ही कसोटी संख्या. जर हिला 7 नं भाग जात असेल तर मूळच्या संख्येलाही जातो, नाही तर नाही, असं आपलं प्रतिपादन. ते सिद्ध करून दाखवायचं आहे. मूळची संख्या आणि कसोटी-संख्या ह्यांची वजाबाकी करू. काय मिळेल?

मूळ संख्या - कसोटी संख्या

= (100u+10v+w) - (10v+w+2u) = 98u

किंवा निराळ्या त-हेनं लिहू.

मूळची संख्या = (10v+w+2u) + 98u

= कसोटी संख्या + 98u अशी लिहिता येते.

पण, 98u ला 7 नं भाग जातोच. मग जर कसोटी-संख्येला 7 नं भाग जात असेल तर प्रमेय 1 प्रमाणं मूळच्या संख्येलाही जाणारच. आणि कसोटी-संख्येला भाग जात नसेल तर **उपप्रमेया**नुसार मूळच्या संख्येलाही जाणार नाही. (हे उपप्रमेय कसं लागतं ते कळलं का?)

17 नं 102 ला भाग जातो हे लक्षात घेऊन 17 ची विभाज्यता कसोटी कशी ठरवाल?

3 आणि 9 च्या कसोट्यांमागील कारणं सांगता?

3

17 ची कसोटी: दशक-एककचा तुकडा हा पहिला भाग आणि राहिलेला दुसरा. दुस-याच्या दुप्पट आणि पहिला ह्यांच्यातील **फरक** म्हणजे कसोटी-संख्या. जर कसोटी-संख्येला17 नं भाग जात असेल तर मूळच्या संख्येलाही जातो. आणि भाग जात नसेल तर मूळच्या संख्येलाही भाग जात नाही. 7 च्या वेळी **बेरीज** केली होती. इथं **वजाबाकी** (म्हणजे **फरक** घेतला आहे) केली आहे, हे लक्षात घ्या. कारण नंतर कळून येईल.

आपण आधी एक उदाहरण पाहू. 323 घेऊ. पहिला भाग 23, दुस-याची दुप्पट 6 ह्यांच्यातला फरक 23-6=17. पण, 17 ला 17 नं भाग जातोच. म्हणून 323 लाही जातो.

उलट उदाहरण घेऊ 452. मग कसोटी-संख्या 52-8=44, 17 नं 44 ला भाग जात नाही. म्हणून 452 लाही 17 नं भाग जाणार नाही.

कारण: समजा मागच्याप्रमाणंच संख्या 100u+10v+w मानली. मग पहिला भाग 10v+w. आणि दुसरा भाग आता u. त्याच्या दुप्पट 2u मूळ संख्या आणि दुस-या भागाची दुप्पट ह्यांच्यातील फरक 10v+w-2u ही आपली कसोटी-संख्या. जर कसोटी-संख्येला 17 नं भाग जात असेल तर मूळ संख्येलाही जातो, असं आपलं म्हणणं. मूळ संख्या आणि कसोटी-संख्या ह्यांच्यांतील फरक

100u+10v+w-(10v+w-2u) = 102u

किंवा निराळ्या त-हेनं मूळची संख्या

= 100u+10v+w = (10v+w-2u) + 102u

अशी लिहिता येईल. पण, 102 ला 17 नं भाग जातो. तेव्हा जर कसोटी-संख्येला भाग जात असेल तर प्रमेय 3 प्रमाणं मूळच्या संख्येलाही जाईल. आणि कसोटी-संख्येला भाग जात नसेल तर उपप्रमेयानुसार मूळच्या संख्येलाही भाग जाणार नाही. म्हणून कसोटी सिद्ध.

टीप (5): 7, किंवा 17 च्या कसोट्यांबद्दल काही खुलासा करणं जरुरीचं आहे. संख्या 100u+10v+w अशी घेतली. त्यामुळं आपण फक्त तीन अंकी संख्यांचाच विचार केला आहे, असा गैरसमज होईल. पण, तशी स्थिती

नाही. दुसऱ्या भागामध्ये अधिक अंक असू शकतात. थोडक्यात दशक-एकक स्थानचे दोन अंक काढून जे राहतं तो आपला u होय.

संख्या 5732 असेल तर 32 काढून, u=57. दिलेल्या संख्येतील शतकांची संख्या 57 आहे. (शतकस्थानचा अंक 57 आहे, असं म्हटलेलं नाही, हे लक्षात घ्या.)

टीप (6): कसोटी-संख्या स्वतःच जर खूप मोठी असेल, आणि त्यामुळं तिला 7 नं/17 नं भाग जातो की नाही हे पाहणं अवघड असेल तर तिला पुन्हा तीच कसोटी लावायची. आणि सर्व प्रक्रिया पुन्हा करायची.

3/9 च्या कसोट्या: समजा संख्या 100u+10v+w अशी आहे. कसोटी-संख्या म्हणजे तिच्यातल्या अंकांची बेरीज. आणि तिला जर 3 नं/9 नं भाग जात असेल तर दिलेल्या मूळ संख्येलाही 3 नं/9 नं भाग जातो, असं आपण म्हणतो. का?

कारण: समजा संख्या 100u+10v+w अशी आहे. कसोटी-संख्या u+v+w असणार. त्यांच्यांतील फरक

$$(100u+10v+w) - (u+v+w) = 99u+9v$$

असतो. यावरून मूळची संख्या,

$$(100u+10v+w) = (u+v+w) + (99u+9v)$$

अशी लिहिता येईल. पण, दुसऱ्या पदाला 9 नं भाग जातोच. (त्यामुळं 3 नंही जाईल.) म्हणून जर कसोटी संख्येला 9 नं भाग जात असेल तर मूळच्या संख्येलाही 9 नं भाग जाणारच. आणि कसोटी-संख्येला 9 नं भाग जात नसेल तर मूळच्या संख्येलाही 9 नं भाग जाणार नाही. हाच युक्तिवाद 3 करताही करता यईल.

7 आणि 17 च्या कसोट्या कशा तयार केल्या आहेत, हे कळलं असेल तर तुम्ही कोणत्याही मूळ संख्येकरता अशा विभाज्यतेच्या कसोट्या तयार करू शकाल.

कसोट्यांचं बारकाईनं निरीक्षण करू. 98 ही 7 ची शंभराच्या सर्वांत जवळची पट आहे. ती शंभराला 2 नं **कमी** आहे. म्हणून दुसऱ्या भागाची दुप्पट पहिल्या भागात **मिळवली** की कसोटी-संख्या तयार होते. कमी असताना बेरीज केली कारण त्यामुळं, आपण नंतर मूळची संख्या आणि

कसोटी-संख्या ह्यांची वजाबाकी करू तेव्हा ती आपोआपच वजा केली जाईल. आणि 17 च्या कसोटीकरता नेमकं उलट केल्याचं दिसेल.

102 ही 17 ची शंभराच्या जवळची पट आहे, हे तुमच्या लक्षात आलं असेलच. पण, 102 शंभराहून 2 नं **जास्त** आहेत. म्हणून पहिल्या भागातून दुसऱ्याची दुप्पट **वजा** केली. प्रत्यक्षात आपण फरक घ्यावा असं म्हटलं होतं. ते अशाकरता की कोणती संख्या मोठी असेल ते आधीच कसं सांगणार? 'वजा करा,' असं म्हटलं तरी चालेल. फारतर वजाबाकी ऋण येईल, इतकंच पण संख्येला किंवा तिच्या ऋण संख्येला भागण्याच्या कसोट्यांत काही फरक पडत नाही. मूळ संख्या आणि कसोटी-संख्या ह्यांची वजाबाकी केल्यावर दुसऱ्याची दुप्पट आपोआपच मिळवली जाईल. उदाहरणार्थ, 19 ची कसोटी आपण तयार करू. 19 ची शंभराच्या जवळची पट 95. हे 100 पेक्षा 5 नं कमी आहेत. म्हणून दशक-एककच्या भागात उरलेल्या, म्हणजेच दुसऱ्या भागाची, 5 पट **मिळवल्यावर** कसोटी-संख्या तयार होते.

एखाद्या संख्येकरता कसोटी लावूनच पाहू. समजा 399. 99 चा पहिला भाग. त्यात पहिल्याची म्हणजे 3 ची पाचपट 15 मिळवले. 114. तुम्हाला एकोणीस सक चौदोदरसे माहीत असेल तर 114 ला 19 नं भाग जातो, हे लगेच लक्षात येईल. नाहीतर पुन्हा हीच कसोटी लावा. पहिला भाग 14. त्यात दुसऱ्याची म्हणजेच 1 ची पाचपट मिळवा. कसोटीसंख्या आली 19 वा! कामच झालं!

11 ची कसोटी: ही कसोटी आपल्या प्रकारात बसवता येईल का? 11 ची शंभराच्या सर्वांत जवळची पट 99. ती शंभरापेक्षा 1 नं कमी आहे. म्हणून पहिल्या भागात दुसरा (दुसऱ्याची एकपट) मिळवायची म्हणजे कसोटी-संख्या मिळेल. उदाहरणार्थ 132. कसोटी-संख्या 32+1=33!

तत्त्वतः ह्या प्रकारानं कोणत्याही मूळ संख्येची विभाज्यता कसोटी मिळवता येत असली तरी प्रत्येक कसोटी तेवढी सुटसुटीत, सोपी, सोयीस्कर, असेलच असं नाही. 19 ची कसोटी आपण पाहिली. तिची 100 च्या जवळची पट 95, किंवा 23 ची शंभराच्या जवळची पट 92. ह्या पटी शंभरापासून काहीशा दूर आहेत.

कधी कधी पहिल्या भागात दोन अंक घेऊन पुरत नाही. कारण ज्या मूळ संख्येकरता कसोटी तयार करायची आहे, तिची शंभराच्या सर्वांत

जवळची पट शंभरापासून फारच दूर असते. अशा वेळी तीन किंवा अधिक अंक घ्यावे लागतील. म्हणजे 1000च्या जवळची किंवा 10000 च्या जवळची पट घ्यावी लागेल. त्यानुसार पहिल्या भागात तीन किंवा चार अंक घ्यावे लागतील. त्यामुळंच अशा कसोट्या फारशा सोयीच्या होत नाहीत. उदाहरणार्थ, 13 ची कसोटी पाहू. शंभराच्या सर्वात जवळची पट 91. म्हणजे पहिल्या भागात दुसऱ्याची 9 पट मिळवावी लागेल. पण तीन अंक घेतले तर? म्हणजेच पहिला भाग शतक-दशक-एककांचा केला तर? कारण 13 ची हजारच्या जवळची पट 1001. ती 1000 च्या खूपच जवळ आहे. याचा अर्थ दुसरा भाग वजा पहिला भाग करून13 ची कसोटी-संख्या मिळेल. उदाहरणार्थ, 1274 घ्या. पहिला भाग 274 आणि दुसरा भाग 1. तो पहिल्यातून वजा केला की 273. हिला 13 नं भाग जातो. ह्या कसोटीचीही सिद्धता पाहू. आता संख्या

$$1000u+100v+10w+x$$

अशी घ्यावी लागेल. (पूर्वीसारखेच स्वतः u मध्ये अधिक अंक असू शकतील.) कसोटी संख्या 100v+10W+x-u अशी मिळेल. मूळच्या संख्येतून ही वजा करू. मग

$$1000u+100v+10w+x-(100v+10W+x-u)=1001u.$$

1001u ला 13 नं भाग जातो. म्हणजे कसोटी सिद्ध झाली.

ही कसोटी 7 आणि 11 लाही चालू शकते. मूळ संख्या आणि कसोटी-संख्या ह्यांतील फरक 1001u येईल. आणि 1001 ला 7 नं व 11 नंही भाग जातोच.

ह्याप्रमाणं वेगवेगळ्या कसोटी-संख्या तयार करा. उदाहरणार्थ,

23 **ची कसोटी:** 23 ची शंभराच्या जवळची पट92. म्हणून दशक-एककांचा पहिला भाग व दुसऱ्या भागाची 8 पट पहिल्यात मिळवल्यावर कसोटी-संख्या मिळेल. पण, वर म्हटल्याप्रमाणं ही कसोटी फारशी सुटसुटीत नाही.

वजाबाकी: मागच्या वेळी सांगितलेल्या वजाबाकीच्या रीतीकडे आता वळू. आपल्याला 7843 - 5492 ही वजाबाकी करायची होती. पण आपण काय केलं? 5492 ऐवजी ही संख्या 4507 घेतली आणि ही संख्या पहिल्या संख्येत मिळवली किंवा बेरीज केली म्हणा.4507 ही संख्या कशी मिळवली?

ती संख्या खरं तर 9999 - 5492 असं करून मिळाली होती. म्हणजे आपण प्रत्यक्षात

$$7843+4507=7843+(9999-5492)$$
$$=(7843-5492)+9999$$

अशी आकडेमोड केली. निराळ्या शब्दांत, वजाबाकी केलेलीच होती. पण, 9999 उगीचच मिळवले गेले होते. म्हणून ते काढून टाकले पाहिजेत. ते आपण कसे काढून टाकले, हे लक्षात आलं का? पहिला 1 काढून टाकला आणि तो एककस्थानी मिळवला. आलेल्या बेरजेतला पहिला अंक वगळला, म्हणजे प्रत्यक्षात 10000 वजा केले. आणि शेवटी 1 मिळवला. म्हणजेच आलेल्या बेरजेतून 9999 (आधी उगीचच मिळवलेले) वजा केले की नाही? फिटंफाट! प्रधानाचा अठरावा हत्ती परत केला. आणि वजाबाकी सुलभ झाली.

4

51 ते 75 ह्या संख्यांचे वर्ग: 1 ते 25 पर्यंतच्या संख्यांचे वर्ग माहीत असल्यास 26 ते 50 ह्या संख्यांचे वर्ग करण्याच्या युक्त्या आणि मुख्यतः त्यामागची कारणं आपण पान 2,3 वर पाहिली. आता 51 ते 75 पर्यंतच्या संख्यांचे वर्ग करण्याच्या युक्त्या आपणच तयार करू. त्या तयार करता करताच आपल्याला त्यांच्या मागची कारणंही कळतील. त्यांतली एक नमुना संख्या 50 + x अशी लिहू. x ही संख्या 1 ते 25 यांच्या दरम्यान असणार. आणि त्यांचे वर्ग तर आपण पाठ केलेलच आहेत. मग,
$(50 + x)^2 = 2500 + 100x + x^2 = (25 + x)$ शे + x^2, हे आपल्याला माहीत आहे. एकदा हे सूत्र कळलं की पुढचं काम सोपं होईल. x^2 मध्ये 2500 म्हणजे25 शतक तर मिळवायचेच पण आणखी x शतकही मिळवायचे.

हे एका उदाहरणानं समजून घेऊ. समजा आपल्याला 57 चा वर्ग हवा आहे. याचा अर्थ x = 7 आहे. म्हणून आता $57^2 = (25 + 7)$ शे + 7^2 = (25 + 7) शे + 49 = 3249. तुम्ही आणखी उदाहरणं करून सराव करा म्हणजे रीत चांगली लक्षात राहील.

76 ते 100 ह्या संख्यांचे वर्ग: आपण वरच्याप्रमाणंच रीत तयार करून पाहू.

76 ते 100 च्या दरम्यानची संख्या 100 - x अशी लिहू. मग तिचा वर्ग
$= (100 - x)^2 = 10000 - 200x + x^2$
$= (100 - x)^2 = (100 - 2x)$ शे $+ x^2$

हे सूत्र समजलं की काम सोपं झालंच. हेही एका उदाहरणानंच समजून घेऊ. समजा आपल्याला 93 चा वर्ग करायचा आहे. पण आपल्याला 93 = 100 - 7, म्हणजे x = 7. म्हणून आता $93^2 = (100 - 14)$ शे $+ 7^2$ $= (100 - 14)$ शे $+ 49 = 8649$. पक्कं होण्यासाठी आणखी वर्ग करा.

अर्थात एकादी संख्या 100 च्या बरीच जवळ असेल तर तिचा वर्ग करणं जरा आणखी सोपं जाईल, हे नक्की. कारण ती रीत आपण (रीत 2 पान 3 वर) पाहिलीच आहे.

वरील दोन्ही गटातल्या संख्यांतील x चा वर्ग एक अंकी किंवा तीन अंकी असला तर काय करायचं ते तुम्हाला माहीत आहे. विसरलं असेल तर, पान 3 व 4 वरील 97 आणि 88 ह्या संख्यांच्या वर्गांच्या रीती पाहा.

समारोपः एकूण लक्षात ठेवण्याचा मुद्दा असा. गणितात आपल्याला कोणीही कोणतीही युक्ती किंवा रीत सांगितलेली असो. ती तशी का वापरायची, तिच्यामागील गणिती तत्त्व कोणतं, ह्याचा छडा लावायचा प्रयत्न करायचा. अंधळेपणानं काहीही स्वीकारायचं नाही. कारण,

गणित म्हणजे का?

तुम्हाला असे प्रश्न नेहमी पडत असतीलच. पण त्यांचा पाठपुरावा तुम्ही नेहमी करताच असं नाही. आणि तो न केल्यामुळं तुमच्या मनात शंकांचं मोहोळ तसंच कायम राहतं. म्हणून इथं प्रा. राईलकरसर सांगताहेत त्याप्रमाणं तुम्ही सतत प्रश्न विचारले पाहिजेत. शक्य तर त्यांची उत्तरं स्वतःच मिळवायची धडपड केली पाहिजे. तुम्हाला त्यांची उत्तरं मिळाली नाहीत तर, तुम्ही आपल्या शंका आमच्याकडे पाठवा. आम्ही त्यांचं निरसन करू आणि त्यांची उत्तरं तुम्हाला सांगू. मग विचारणार ना प्रश्न? **संपादक.**